

# ВѢСТНИКЪ

## МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

№ 14 и 15.

СОДЕРЖАНИЕ.—I. Представление Гамильтона дифференциальнаго уравненія при помощи определителя, Др. Неймана. Доказательство теоремы Коши и Новое доказательство теоремы Вильсона, Буаева. II. Библиографическій указатель. III. Извѣст. изъ період. изданій: 1. Новый выводъ формулъ для сферическаго эксцесса, Др. О. Вернера. 2. Изслѣдованія о теплопроводности газовъ Магнуса и Тиндалла.—Два рѣшенія задачи № 3, Лесникова и Износкова.—Извѣстіе о новой кометѣ.

### *Darstellung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung mit Hilfe einer Determinante.*

Das Problem, die Bewegung eines Systems materieller Punkte zu ermitteln, mögen dieselben nun frei beweglich sein, oder mag ihre Beweglichkeit gegebenen Beschränkungen unterliegen, lässt sich bekanntlich immer, falls nur die einwirkenden Kräfte ein Potential besitzen, auf eine Aufgabe der Variationsrechnung zurückführen. Bedeuten nämlich  $q_1, q_2, \dots, q_n$  die independenten Variablen, welche an Stelle der, im Allgemeinen durch gegebene Bedingungen mit einander verbundenen, rechtwinkligen Coordinaten des Punktsystemes eingeführt sind; so ist das mechanische Problem gelöst, so bald man diese  $q_i$  als Functionen der Zeit  $t$  der Art bestimmt hat, dass das Integral

$\int (T - V) dt$  ein Maximum oder Minimum wird. Es bedeutet hier  $T$  die halbe lebendige Kraft des Systems und  $V$  das Potential (\*) der einwirkenden Kräfte.

Ich werde nun im vorliegenden Aufsatz die partielle Differential-Gleichung, auf deren Lösung die Ermittlung der  $q_i$  recurriert, vollständig aufstellen, und zwar in § 2. für den Fall, dass die Beschränkungen, denen die Beweglichkeit des Punktsystemes unterworfen ist, unabhängig von der Zeit sind;

in § 3. für den Fall, dass die eben genannten Beschränkungen gegebene Functionen der Zeit sind;

ferner in § 4. für den Fall, dass die relative Be-

wegung eines einzelnen frei beweglichen Punktes in Bezug auf ein, selber in vorgeschriebener Bewegung begriffenes, Axensystem ermittelt werden soll;

und endlich in § 5. auch dann, wenn es sich nicht, wie im vorhergehenden Falle, um die relative Bewegung eines einzelnen, frei beweglichen Punktes, sondern um die relative Bewegung eines Punktsystemes handelt, mag nun die Beweglichkeit desselben frei, oder mag sie gegebenen Beschränkungen unterworfen sein.

Als Fundament meiner Untersuchung dient das in § 1. mitgetheilte, durch die Vorlesungen von Richelot mir bekannt gewordene, Theorem I, so wie das allgemein bekannte, in demselben § angegebene, Theorem II.

#### § 1.

I Theorem. „Versteht man unter  $q_1, q_2, \dots, q_n$  unbekannte Functionen von  $t$ , und unter  $L$  irgend welchen gegebenen, aus  $t$ , aus den  $q_i$  und den  $\frac{dq_i}{dt}$  zusammengesetzten Ausdruck, so sind die aus der Bedingung

$$(1.) \quad \delta \int L dt = 0$$

fließenden Differentialgleichungen:

$$(2.) \quad \frac{dq_i}{dt} = q'_i, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

immer der Reduction auf die Hamilton-Jacobische Form fähig.

Setzt man nämlich:

$$(2a.) \quad \left( \frac{\partial L}{\partial q'_1} q'_1 + \frac{\partial L}{\partial q'_2} q'_2 + \dots + \frac{\partial L}{\partial q'_n} q'_n \right) - L = H$$

und bezeichnet man mit

(\*) Da das Wort „Potential“ nicht immer in ganz gleichem Sinne gebraucht wird, so sei bemerkt, dass ich, wenn  $m$  die Masse eines Punktes ( $x, y, z$ ) vorstellt, unter dem Potential der auf diesen Punkt einwirkenden Kraft, diejenige Function  $V$  verstehe, vermittelst deren sich die Differentialgleichungen des Punktes in folgender Weise darstellen lassen:  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial x}$ , etc.



» $H(t, q_1, q_2, \dots, q_\alpha, p_1, p_2, \dots, p_\alpha)$  denjenigen Ausdruck, in welchen sich  $H$  verwandelt, so bald man darin an Stelle der  $q'_k$  die, mit diesen durch die Relationen

$$\frac{\partial L}{\partial q'_1} = p_1, \quad \frac{\partial L}{\partial q'_2} = p_2, \dots, \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} = p_\alpha$$

verbundenen, neuen Variablen  $p_k$  einführt; ferner mit  $\frac{DH}{Dq_k}, \frac{DH}{Dp_k}$  die diesem Ausdruck  $H(t, q_1, \dots, p_1, \dots)$  zugehörigen partiellen Differential-Coefficienten: so nehmen die Differential-Gleichungen (2.) durch Einführung der  $p_k$  an Stelle der  $q'_k$  folgende Form an:

$$(3.) \quad \frac{dq_k}{dt} = \frac{DH}{Dp_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = - \frac{DH}{Dq_k}$$

II. Theorem. »Die Integration der Gleichungen (3.) lässt sich reduciren auf die vollständige Auflösung einer gewissen partiellen Differential-Gleichung. Bezeichnet man mit  $\varphi$  eine unbekannte von  $t, q_1, q_2, \dots, q_\alpha$  abhängende Function, ferner mit

$$H(t, q_1, q_2, \dots, q_\alpha, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha})$$

oder kürzer mit  $\bar{H}$  denjenigen Ausdruck, in welchen sich das in (3.) enthaltene  $H = H(t, q_1, \dots, p_1, \dots)$  verwandelt, sobald man darin an Stelle der Argumente  $p_1, p_2, \dots, p_\alpha$  die Ableitungen  $\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha}$  substituirt; so ist die in Rede stehende partielle Differential-Gleichung folgende:

$$(4.) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{H} = 0$$

»Gelingt es nämlich die vollständige Lösung  $\varphi$  dieser partiellen Differential-Gleichung zu finden; und bezeichnet man die, in derselben enthaltenen, willkürlichen Constanten mit  $A_1, A_2, \dots, A_\alpha$ ; ferner mit  $B_1, B_2, \dots, B_\alpha$  ebenfalls willkürlich gewählte Constanten: so sind

$$(5.) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial A_k} = B_k, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial B_k} = p_k$$

»die vollständigen, endlichen Integrale der Gleichungen (3.).

»Da ferner  $\varphi$  nur die Variablen  $t, q_1, q_2, \dots, q_\alpha$  enthält, so sind zugleich

$$(6.) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial A_k} = B_k$$

»diejenigen endlichen Gleichungen, durch welche  $q_1, q_2, \dots, q_\alpha$  als Functionen von  $t$  der Art bestimmt werden, wie es die in (1) gestellte Bedingung  $\delta \int L dt = 0$  verlangt.

Das Theorem (II) zu beweisen, würde überflüssig sein. Dagegen scheint es wohl erforderlich, die in Theorem (I) ihrem Resultat nach angegebene Transformation ausführlich darzustellen.

Es handelt sich darum in den aus (1) unmittelbar fließenden Differential-Gleichungen (2.):

$$(7.) \quad \frac{dq_k}{dt} = q'_k, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

an Stelle der  $q'_k$  neue Variable einzuführen, nämlich die Variablen  $p_k$ , welche mit jenen durch die  $\alpha$  Relationen

$$(8.) \quad \frac{\partial L}{\partial q'_k} = p_k$$

zusammenhängen. Zu diesem Zweck leiten wir zunächst aus dem gegebenen Ausdruck  $L$  einen andern ab, welcher mit  $H$  bezeichnet werden mag, und folgende Form besitzen soll:

$$H = \sum_{k=1}^{\alpha} \left( q'_k \frac{\partial L}{\partial q'_k} \right) - L$$

Denken wir uns nun in diesem Ausdruck die darin enthaltenen Variablen  $q_k, q'_k$  um beliebige kleine Incremente  $\Delta q_k, \Delta q'_k$  vermehrt, und bezeichnen wir den daraus für  $H$  selber entstehenden Zuwachs mit  $\Delta H$ , so ist:

$$\Delta H = \sum_{k=1}^{\alpha} \left( \frac{\partial L}{\partial q'_k} \Delta q'_k + q'_k \frac{\partial L}{\partial q'_k} \Delta q'_k \right) - \sum_{k=1}^{\alpha} \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \Delta q_k + \frac{\partial L}{\partial q'_k} \Delta q'_k \right)$$

d. i.

$$\Delta H = \sum_{k=1}^{\alpha} \left( q'_k \frac{\partial L}{\partial q'_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \Delta q_k$$

also mit Benutzung von (8.):

$$\Delta H = \sum_{k=1}^{\alpha} \left( q'_k \Delta p_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} \Delta q_k \right)$$

Diese Formel macht  $\Delta H$  abhängig von den  $\Delta q_k$  und den  $\Delta p_k$ , giebt also den Zuwachs, welchen der Ausdruck  $H$  empfängt, der Art an, als wäre derselbe nicht aus den  $q_k$  und  $q'_k$  sondern aus den  $q_k$  und  $p_k$  zusammengesetzt. Wir können demnach aus dieser Formel unmittelbar auf die Werthe derjenigen partiellen Ableitungen  $\frac{DH}{Dq_k}, \frac{DH}{Dp_k}$  schließen, welche dem Ausdruck  $H$  zukommen, sobald man denselben als Function der  $q_k$  und  $p_k$  ansieht. Für die genannten Ableitungen ergeben sich nämlich sofort folgende Formeln:

$$(9.) \quad \frac{DH}{Dq_k} = - \frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad \frac{DH}{Dp_k} = q'_k$$

Vermittelt dieser Gleichungen (9) und der Gleichungen (8) verwandeln sich aber unsere Differential-Gleichungen (7) augenblicklich in:

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{DH}{Dp_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = - \frac{DH}{Dq_k} \quad \text{q. e. d.}$$



§ 2.

Wenden wir uns zunächst zur Behandlung eines Punctsystemes, dessen Beweglichkeit durch gegebene, und zwar von der Zeit unabhängige, Bedingungen beschränkt ist. Bezeichnet man die Anzahl der Puncte des Systemes mit  $n$  und die Anzahl der gegebenen Bedingungs-Gleichungen mit  $\beta$ , so wird man die  $3n$  Coordinaten sämtlicher Puncte des Systemes abhängig machen können von  $3n - \beta = \alpha$  independenten Variablen  $q_1, q_2, \dots, q_\alpha$ . Da die gegebenen Bedingungen von der Zeit  $t$  unabhängig sind, so werden die Relationen, durch welche die Coordinaten  $x, y, z$  irgend eines Punctes  $m$  des Systemes mit den independenten Variablen zusammenhängen:

$$(9a.) \quad \begin{cases} x = \varphi(q_1, q_2, \dots, q_\alpha) \\ y = \psi(q_1, q_2, \dots, q_\alpha) \\ z = \chi(q_1, q_2, \dots, q_\alpha) \end{cases}$$

ebenfalls frei von  $t$  sein. Demnach ergibt sich für die halbe lebendige Kraft  $T$  des Systemes folgender Werth:

$$T = \frac{1}{2} S m. \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \right)^2 \\ & + \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \right)^2 \\ & + \left( \frac{\partial z}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \right)^2 \end{aligned} \right\}$$

wo  $\dot{q}_k$  für  $\frac{dq_k}{dt}$  steht, und die Summation  $S$  über alle Puncte  $m$  ( $x, y, z$ ) des Systemes auszudehnen ist. Dieser Ausdruck für  $T$  verwandelt sich, wenn man ihn nach Potenzen und Producten der  $\dot{q}_k$  ordnet in:

$$(10.) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\alpha} \sum_{i=1}^{\alpha} u_{ki} \cdot \dot{q}_k \dot{q}_i$$

wo  $u_{ki} = S m \left( \frac{\partial x}{\partial q_k} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial y}{\partial q_k} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial z}{\partial q_k} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)$  ist. Es ist also  $T$  hinsichtlich der  $\dot{q}_k$  ein homogenes Polynom 2-ten Grades.

Das Potential  $V$  der auf das Punctsystem einwirkenden Kräfte wird zunächst als eine Function gegeben sein, welche von den rechtwinkligen Coordinaten  $x, y, z$  und möglicher Weise auch noch von der Zeit  $t$  abhängt. Diese Function kann aber mit Hülfe der Relationen (9a.) sofort in einen, von den  $q_k$  und  $t$  abhängenden Ausdruck umgewandelt werden, so dass also

$$V = F(t, q_1, q_2, \dots, q_\alpha)$$

wird. Um die Bewegung des Punctsystemes zu ermitteln, hat man bekanntlich  $q_1, q_2, \dots, q_\alpha$  der Art als Functionen der Zeit zu bestimmen, dass das Integral

$$\int (T - V) dt$$

ein Maxim oder Minim. wird. Um nun diese Bestimmung der  $q_k$  nach den Vorschriften des § 1 auf die Lösung einer partiellen Differential-Gleichung zu reduciren, müssen der Reihe nach die dort angegebenen Ausdrücke  $L, H, \bar{H}$  gebildet werden. Zunächst ist hier:

$$L = T - V.$$

Sodann ergibt sich aus (2a), mit Rücksicht darauf, dass  $V$  von den  $q_k$  unabhängig ist:

$$H = \sum_{k=1}^{\alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) - (T - V),$$

oder, weil  $T$  ein homogenes Polynom in Bezug auf die  $\dot{q}_k$  ist, und demzufolge die identische Gleichung

$$(12.) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right)$$

stattfindet:

$$(13.) \quad H = 2T - (T - V) = T + V.$$

Aus diesem  $H$  muss nun der in § 1 angegebene Ausdruck  $H(t, q_1, q_2, \dots, q_\alpha, p_1, p_2, \dots, p_\alpha)$  abgeleitet werden; d. h. es müssen in  $H$  an Stelle der  $\dot{q}_k$  die mit diesen durch die Relationen

$$(14.) \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k, \text{ oder } \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = p_k$$

verbundenen neuen Variablen  $p_k$  eingeführt werden. Zu diesem Zweck bilden wir mit Hülfe von (12.) und (13.) die Formel:

$$H - V = T = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \right)$$

oder mit Rücksicht auf (14.)

$$2(H - V) = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + \dots + p_\alpha \dot{q}_\alpha$$

ferner mit Hülfe von (10) und (14) die Formeln:

$$p_1 = u_{11} \dot{q}_1 + u_{12} \dot{q}_2 + \dots + u_{1\alpha} \dot{q}_\alpha$$

$$p_2 = u_{21} \dot{q}_1 + u_{22} \dot{q}_2 + \dots + u_{2\alpha} \dot{q}_\alpha$$

$$\dots$$

$$p_\alpha = u_{\alpha 1} \dot{q}_1 + u_{\alpha 2} \dot{q}_2 + \dots + u_{\alpha \alpha} \dot{q}_\alpha$$

und erhalten sodann aus den letzten  $(\alpha + 1)$  Gleichungen, durch Elimination der  $\dot{q}_k$ , sofort:

$$\begin{vmatrix} 2(H - V) & p_1 & p_2 & \dots & p_\alpha \\ p_1 & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1\alpha} \\ p_2 & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_\alpha & u_{\alpha 1} & u_{\alpha 2} & \dots & u_{\alpha \alpha} \end{vmatrix} = 0.$$

Da sowohl  $V$  als auch die  $u_{ki}$  unabhängig sind von dem  $\dot{q}_k$ , so ist  $H$  durch diese Gleichung als Function von  $t, q_1, q_2, \dots, q_\alpha, p_1, p_2, \dots, p_\alpha$  dargestellt. Um nun ferner das in § 1 angegebene  $\bar{H}$  zu erhalten,







$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=\alpha} \sum_{i=0}^{i=\alpha} (u_{ki} q'_k q'_i) \quad (18.)$$

wo:

$$u_m = S m \left( \frac{\partial x}{\partial q_k} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial y}{\partial q_k} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial z}{\partial q_k} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)$$

ist, und wo  $S$  wieder die über alle Punkte  $m$  des Systems auszudehnende Summation andeutet.

Wenden wir nur die in § 1 aufgestellten Theoreme an, so ist für  $L$  wiederum der Ausdruck  $T - V$  zu nehmen:

$$L = T - V$$

oder nach (18a.)

$$L = T - V. q'_0 q'_0$$

d. i

$$(19.) \quad L = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=\alpha} \sum_{i=0}^{i=\alpha} (u_{ki} q'_k q'_i) - V. q'_0 q'_0.$$

Dieser Ausdruck für  $L$  stellt in Bezug auf die  $(\alpha+1)$  Grössen  $q'_0, q'_1, q'_2, \dots, q'_\alpha$  ein *homogenes* Polynom 2 Grades dar, und genügt also folgender Gleichung:

$$(20.) \quad 2L = q'_0 \frac{\partial L}{\partial q'_0} + q'_1 \frac{\partial L}{\partial q'_1} + \dots + q'_\alpha \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha}.$$

Demzufolge können wir dem in § 1 angegebenen Ausdruck  $H$

$$H = q'_1 \frac{\partial L}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial L}{\partial q'_2} + \dots + q'_\alpha \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} - L$$

im vorliegenden Falle, mit Rücksicht auf (20), die Form geben:

$$(21.) \quad H = L - q'_0 \frac{\partial L}{\partial q'_0}.$$

Führen wir nun die in § 1 angegebenen neuen Variablen

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial q'_1}, p_2 = \frac{\partial L}{\partial q'_2}, \dots, p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha}$$

und daneben noch die Variable

$$p_0 = \frac{\partial L}{\partial q'_0},$$

so ergibt sich aus (19), (20), (21) sofort:

$$(23.) \quad \begin{vmatrix} u_{00} - 2 \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + V \right) & u_{01} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_1} & u_{02} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_2} & \dots & u_{0\alpha} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_\alpha} \\ u_{10} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_1} & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1\alpha} \\ u_{20} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_2} & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{\alpha 0} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_\alpha} & u_{\alpha 1} & u_{\alpha 2} & \dots & u_{\alpha \alpha} \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{aligned} 2L &= p_0 q'_0 + p_1 q'_1 + \dots + p_\alpha q'_\alpha \\ p_0 &= (u_{00} - 2V) q'_0 + u_{01} q'_1 + \dots + u_{0\alpha} q'_\alpha \\ p_1 &= u_{10} q'_0 + u_{11} q'_1 + \dots + u_{1\alpha} q'_\alpha \\ &\dots \\ p_\alpha &= u_{\alpha 0} q'_0 + u_{\alpha 1} q'_1 + \dots + u_{\alpha \alpha} q'_\alpha \\ H &= L - p_0 q'_0 \end{aligned}$$

Wenn man durchgängig für  $q'_0$  seinen Werth 1 substituirt, ferner die beiden ersten Gleichungen von einander subtrahirt, und dabei für  $2L - 2p_0$ , der letzten Gleichung gemäss,  $2H$  einsetzt, so erhält man:

$$\begin{aligned} u_{00} + 2(H - V) + (u_{01} - p_1) q'_1 + (u_{02} - p_2) q'_2 + \dots + (u_{0\alpha} - p_\alpha) q'_\alpha &= 0 \\ (u_{10} - p_1) + u_{11} q'_1 + u_{12} q'_2 + \dots + u_{1\alpha} q'_\alpha &= 0 \\ (u_{20} - p_2) + u_{21} q'_1 + u_{22} q'_2 + \dots + u_{2\alpha} q'_\alpha &= 0 \\ &\dots \\ (u_{\alpha 0} - p_\alpha) + u_{\alpha 1} q'_1 + u_{\alpha 2} q'_2 + \dots + u_{\alpha \alpha} q'_\alpha &= 0 \end{aligned}$$

und daraus endlich durch Elimination von  $q'_1, q'_2, \dots, q'_\alpha$ :

$$(22.) \quad \begin{vmatrix} u_{00} + 2(H - V) & u_{01} - p_1 & u_{02} - p_2 & \dots & u_{0\alpha} - p_\alpha \\ u_{10} - p_1 & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1\alpha} \\ u_{20} - p_2 & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{\alpha 0} - p_\alpha & u_{\alpha 1} & u_{\alpha 2} & \dots & u_{\alpha \alpha} \end{vmatrix} = 0$$

Durch diese Gleichung ist  $H$  als Function von  $t, q_1, q_2, \dots, q_\alpha, p_1, p_2, \dots, p_\alpha$  dargestellt. Die partielle Differential-Gleichung

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + H = 0$$

auf welche das vorliegende Problem führt, wird daher, wie man leicht übersieht, aus der Formel (22) sofort erhalten, wenn man darin an Stelle von  $H, p_1, p_2, \dots, p_\alpha$  respective  $-\frac{\partial \bar{p}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_1}, \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_2}, \frac{\partial \bar{p}}{\partial q_\alpha}$  substituirt. Demnach ergibt sich folgender Satz:

„Handelt es sich um die Bewegung eines dem Potential  $V$  unterworfenen Punctsystemes, welches in seiner Beweglichkeit durch irgend welche, mit der Zeit sich ändernde, Bedingungen beschränkt ist; sind demnach die rechtwinkligen Coordinaten  $x, y, z$ , irgend eines Punctes  $m$  mit den independenten Variablen  $q_1, q_2, \dots, q_\alpha$  durch Relationen verbunden, in welchen ausser den genannten Grössen auch noch die Zeit vorkommt; so hängt die Ermittlung der in Frage stehenden Bewegung von der vollständigen Lösung  $\bar{p}$  folgender partiellen Differential-Gleichung ab:



wo unter den  $u_i$  die Ausdrücke

$$u_i = S^m \left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)$$

und in diesen unter  $q_1, q_2, \dots, q_a$  die independenten Variablen, unter  $q_0$  dagegen die Zeit  $t$  zu verstehen ist.

Man übersieht leicht, dass die im vorhergehenden § gefundene partielle Differential-Gleichung (17) einen speziellen Fall der gegenwärtig gefundenen (23) bildet. Wendet man nämlich (23) auf ein mechanisches Problem an, bei welchem die Bedingungs-Gleichungen von der Zeit  $t$  unabhängig sind, so verschwinden die mit dem Index (0) behafteten  $u$ . Fallen diese aber fort, so wird (23) identisch mit (17); wie man sofort erkennt, sobald man beachtet, dass der Wert einer Determinante ungeändert bleibt, wenn gleichzeitig die Glieder der ersten Horizontal- und die der ersten Verticalreihe mit  $-1$  multiplicirt werden.

#### § 4.

Wir wollen nun zu den Problemen der relativen Bewegung übergehen, und hierbei beginnen mit dem Fall eines einzelnen und frei beweglichen Punctes  $m$ . Sind  $x, y, z$ , die, nach drei unbeweglichen und aufeinander senkrechten Axen gemessenen, Coordinaten dieses Punctes, und andererseits  $\xi, \eta, \zeta$  die Coordinaten desselben in Bezug auf ein in vorgeschriebener Bewegung begriffenes, ebenfalls rechtwinkliges Coordinatensystem, so finden zwischen diesen  $x, y, z$  und  $\xi, \eta, \zeta$  Relationen von folgender Form statt:

$$(23a.) \quad \begin{cases} x = \sigma_1 + \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta \\ y = \sigma_2 + \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta \\ z = \sigma_3 + \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3 \zeta \end{cases}$$

wo die  $\sigma_k, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ , gegebene Functionen der Zeit sind, welche den bekannten 6 Gleichungen:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 0, \quad \text{etc.} \quad \text{etc.}$$

Genüge leisten. Um die halbe lebendige Kraft:

$$T = \frac{m}{2} (x'x' + y'y' + z'z')$$

durch die relativen Coordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  darstellen zu können, wird es zweckmässig sein, folgende Bezeichnungen einzuführen:

$$x'x' = \frac{d}{dt} (2\sigma_1(\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta) + f\sigma_1\sigma_1' dt)$$

folglich mit Rücksicht auf (24):

$$(29.) \quad T = \frac{m}{2} \left( \frac{dF}{dt} - 2(A\xi + B\eta + C\zeta) + (u^2 + v^2 + w^2) \right),$$

wo  $F$  eine Function ist, deren Bedeutung nicht weiter von Gewicht sein wird.

Soll nun die Bewegung des Punctes  $m$  in Bezug auf das selber in Bewegung begriffene Axensystem ( $\xi, \eta, \zeta$ ) ermittelt werden, so hat man die Coordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  als Functionen der Zeit so zu bestimmen, dass

$$(24.) \quad \begin{cases} \gamma_1\beta_1' + \gamma_2\beta_2' + \gamma_3\beta_3' = -(\beta_1\gamma_1' + \beta_2\gamma_2' + \beta_3\gamma_3') = a \\ \alpha_1\gamma_1' + \alpha_2\gamma_2' + \alpha_3\gamma_3' = -(\gamma_1\alpha_1' + \gamma_2\alpha_2' + \gamma_3\alpha_3') = b \\ \beta_1\alpha_1' + \beta_2\alpha_2' + \beta_3\alpha_3' = -(\alpha_1\beta_1' + \alpha_2\beta_2' + \alpha_3\beta_3') = c \end{cases}$$

$$(25.) \quad \begin{cases} \alpha_1\sigma_1'' + \alpha_2\sigma_2'' + \alpha_3\sigma_3'' = A \\ \beta_1\sigma_1'' + \beta_2\sigma_2'' + \beta_3\sigma_3'' = B \\ \gamma_1\sigma_1'' + \gamma_2\sigma_2'' + \gamma_3\sigma_3'' = C \end{cases}$$

wo die Accente ( $'$ ), ( $''$ ) durchgängig Differential-Quotienten nach der Zeit vorstellen sollen. Auch wird es gut sein, sogleich zu bemerken, dass für die Functionen  $a, b, c$  folgende Gleichungen gelten:

$$(26.) \quad \begin{cases} a_1' = c\beta_1 - b\gamma_1 \\ \beta_1' = a\gamma_1 - c\alpha_1 \\ \gamma_1' = b\alpha_1 - a\beta_1 \end{cases}$$

Was die Ableitung dieser Gleichungen anbelangt, so ergibt sich z. B. die erste derselben sofort, wenn man die Formeln:

$$\begin{aligned} \alpha_1\alpha_1' + \alpha_2\alpha_2' + \alpha_3\alpha_3' &= 0 \\ \beta_1\alpha_1' + \beta_2\alpha_2' + \beta_3\alpha_3' &= c \\ \gamma_1\alpha_1' + \gamma_2\alpha_2' + \gamma_3\alpha_3' &= -b \end{aligned}$$

der Reihe nach mit  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  multiplicirt, und sodann alle drei addirt; in analoger Weise die beiden übrigen.

Nunmehr können wir zur Bildung des Ausdrucks  $T$  übergehen, und erhalten zunächst aus (23.a):

$$(27.) \quad x' = \sigma_1' + (\alpha_1\xi_1' + \beta_1\eta_1' + \gamma_1\zeta_1') + (\alpha_1'\xi_1 + \beta_1'\eta_1 + \gamma_1'\zeta_1)$$

$$(28.) \quad x' = \sigma_1' + \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w,$$

wo für den Augenblick  $u, v, w$  zur Bezeichnung folgender Ausdrücke gebraucht sind:

$$\begin{aligned} u &= \xi' + b\zeta - c\eta \\ v &= \eta' + c\xi - a\zeta \\ w &= \zeta' + a\eta - b\xi \end{aligned}$$

Durch gleichzeitige Benutzung von (27), und (28) ergibt sich nun

$$x'x' = \sigma_1'\sigma_1' + 2\sigma_1' \frac{d}{dt} (\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta) + (\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w)^2$$

oder

$$- 2\sigma_1' (\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta) + (\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w)^2$$

$$(30.) \quad \delta. \int (T - V) dt = 0$$

wird, wo  $V$  das gegebene, von  $\xi, \eta, \zeta$  und möglicher Weise auch noch von  $t$  abhängige, Potential der auf den Punct einwirkenden Kraft vorstellt. Da übrigens der unter dem Integral-Zeichen stehende Ausdruck  $T - V$  zufolge (29) den Term  $\frac{m}{2} \frac{dF}{dt}$  enthält, dieser Term aber in der Formel (30) vollständig überflüssig ist, so kann man die zur Bestimmung von  $\xi, \eta, \zeta$  dienende Bedingung folgendermas-



sen hinstellen:

$$(31.) \quad \delta \int L dt = 0$$

wo  $L$  folgenden Ausdruck vorstellen soll:

$$L = \frac{m}{2} (-2(A\xi + B\eta + C\zeta) + (u^2 + v^2 + w^2)) - V$$

$$L = \frac{1}{2} (u_{11} \xi'^2 + u_{22} \eta'^2 + u_{33} \zeta'^2 + 2u_{23} \eta' \zeta' + 2u_{31} \xi' \zeta' + 2u_{12} \xi' \eta' + 2u_{01} \xi' + 2u_{02} \eta' + 2u_{03} \zeta' + u_{00}) - V$$

wo also:

$$(32.) \quad \begin{cases} u_{11} = u_{22} = u_{33} = m, & u_{23} = u_{31} = u_{12} = 0 \\ u_{01} = m(b\zeta - c\eta), & u_{02} = m(c\xi - a\zeta), & u_{03} = m(a\eta - b\xi) \\ u_{00} = m((b\zeta - c\eta)^2 + (c\xi - a\zeta)^2 + (a\eta - b\xi)^2) - 2m(A\xi + B\eta + C\zeta) \end{cases}$$

ist, so hat derselbe in Bezug auf  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$  dieselbe Form, wie der in § 3 (19) angegebene Ausdruck in Bezug auf  $q'_1, q'_2, \dots, q'_u$ . Nach § 3, (23) ist demnach die partielle Differential-Gleichung, auf deren Lösung das vorliegende Problem zurückkommt, folgende:

$$\begin{vmatrix} u_{00} - 2\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + V\right) & u_{01} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \xi} & u_{02} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \eta} & u_{03} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \zeta} \\ u_{10} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \xi} & m & 0 & 0 \\ u_{20} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \eta} & 0 & m & 0 \\ u_{30} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \zeta} & 0 & 0 & m \end{vmatrix} = 0,$$

welche schliesslich durch Einsetzung der in (32) für die  $u$  angegebenen Werthe übergeht in:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \zeta}\right)^2 \right\} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \eta} & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \zeta} \\ \xi & \eta & \zeta \\ a & b & c \end{vmatrix} + (A\xi + B\eta + C\zeta) + V = 0.$$

Hier sind  $a, b, c, A, B, C$ , bekannte Functionen von  $t$ , welche mit den ursprünglich gegebenen  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \sigma_k$  durch die Gleichungen (24) (25) zusammenhängen. Ferner ist  $V$  ebenfalls eine gegebene, von  $\xi, \eta, \zeta$  und möglicherweise auch noch von  $t$  abhängende, Function.

### § 5.

Schliesslich mag noch der Fall eines Punctsystemes behandelt werden, dessen Bewegung in Bezug auf ein, in vorgeschriebener Bewegung begriffenes, Axensystem ( $\xi, \eta, \zeta$ ) bestimmt werden soll; mag nun das Potential der einwirkenden Kräfte allein von der Lage des Punctsystemes zu den Axen ( $\xi, \eta, \zeta$ ), oder mag dasselbe ausserdem auch noch abhängig sein von seiner Lage zu den festen Axen ( $x, y, z$ ); mag ferner die Beweglichkeit des Systemes frei oder in gegebener Weise beschränkt sein. Falls jedoch derartige Beschränkungen d. i. gegebene Bedingungen-Gleichungen zwischen den Coordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  existiren, so soll (allerdings nur der Einfachheit willen) angenommen werden, dass diese Bedingungen-Gleichungen unabhängig von  $t$  sind.

Bezeichnet man die Masse irgend eines der Puncte des Systemes mit  $m$ , und die Coordinaten desselben in den

d. i.

$$L = \frac{m}{2} \left\{ \begin{aligned} &(\xi' + b\zeta' - c\eta')^2 \\ &+ (\eta' + c\xi' - a\zeta')^2 \\ &+ (\zeta' + a\eta' - b\xi')^2 \end{aligned} \right\} - m(A\xi + B\eta + C\zeta) - V.$$

Bezeichnet man diesen Ausdruck durch:

beiden Axensystemen mit  $x, y, z$  und  $\xi, \eta, \zeta$ , so ergibt sich aus (29) für die halbe lebendige Kraft  $T$  des Punctsystemes folgender Ausdruck:

$$T = \frac{d}{dt} \left( \frac{S^m F}{2} \right) - S^m (A\xi + B\eta + C\zeta) + \frac{S^m}{2} (u^2 + v^2 + w^2).$$

Die zur Bestimmung der Bewegung des Systemes dienende Formel ist demnach:

$$(33.) \quad \delta \int L dt = 0$$

wo  $L$  folgenden Werth hat:

$$(34.) \quad L = S^m \left\{ \begin{aligned} &(\xi' + b\zeta' - c\eta')^2 \\ &+ (\eta' + c\xi' - a\zeta')^2 \\ &+ (\zeta' + a\eta' - b\xi')^2 \end{aligned} \right\} - S^m (A\xi + B\eta + C\zeta) - V,$$

wenn nämlich  $V$  das gegebene Potential vorstellt, und die Summation  $S$  über alle Puncte  $m$  des Systemes ausgedehnt gedacht wird. Bezeichnet  $a$  die Anzahl von Gleichungen, welche zu den gegebenen zwischen  $\xi, \eta, \zeta$  stattfindenden Bedingungen-Gleichungen noch hinzugefügt werden müsste, um die relative Lage des Punctsystemes in



Bezug auf die Axen ( $\xi, \eta, \zeta$ ) vollständig festzustellen, kann man demnach die rechtwinkligen Coordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  auf  $\alpha$  independente Variable  $q_1, q_2, q_3$  reduciren; so sind nun diese  $q_k$  der Art zu bestimmen, dass sie der Formel (33) Genüge leisten, dass also die nach ihnen genomene Variation des Integrales  $\int L dt$  verschwindet.

Führt man nun in (34) an Stelle der  $\xi', \eta', \zeta'$  die  $q'_k$  ein, so ergiebt sich:

$$L = \sum_{k=1}^m \left\{ (b\xi - c\eta + \sum_{i=1}^a \frac{\partial \xi}{\partial q_i} q'_i)^2 + (c\xi - a\zeta + \sum_{i=1}^a \frac{\partial \eta}{\partial q_i} q'_i)^2 + (a\eta - b\xi + \sum_{i=1}^a \frac{\partial \zeta}{\partial q_i} q'_i)^2 \right\} - \sum m (A\xi + B\eta + C\zeta) - V,$$

wo  $\Sigma$  die über  $k=1, 2, 3, \dots, a$  ausgedehnte Summation andeuten soll. Daraus folgt:

$$(35.) \quad L = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=a} \sum_{i=0}^{i=a} (u_{ki} q'_k q'_i) - V \cdot q'_0 q'_0,$$

wo  $q'_0$  (ebenso wie in § 3) gleich 1 sein soll, und wo die Grössen  $u_{11}, u_{12}, u_{22}$  je nachdem beide Indices  $v$  von 0 verschieden, oder einer derselben, oder beide gleich 0 sind, folgende Werthe besitzen:

$$\begin{aligned} u_{11} &= \sum m \left( \frac{\partial \xi}{\partial q_1} \frac{\partial \xi}{\partial q_1} + \frac{\partial \eta}{\partial q_1} \frac{\partial \eta}{\partial q_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial q_1} \frac{\partial \zeta}{\partial q_1} \right) \\ u_{12} &= \sum m \left( (b\xi - c\eta) \frac{\partial \xi}{\partial q_1} + (c\xi - a\zeta) \frac{\partial \eta}{\partial q_1} + (a\eta - b\xi) \frac{\partial \zeta}{\partial q_1} \right) \\ u_{22} &= \sum m \left( (b\xi - c\eta)^2 + (c\xi - a\zeta)^2 + (a\eta - b\xi)^2 \right) \\ &\quad - \sum 2m (A\xi + B\eta + C\zeta). \end{aligned}$$

Da nun der Ausdruck (35) dieselbe Form besitzt, wie der in § 3, (19) aufgestellte; so ergiebt sich, dass die partielle Differential-Gleichung, auf deren Lösung des gegenwärtig vorliegende mechanische Problem recurirt, sofort erhalten wird, wenn man in der dort gefundenen partiellen Differential-Gleichung (23) die so eben für  $u_{11}, u_{12}, u_{22}$  aufgestellten Werthe substituirt.

Halle. Februar. 1861.

Dr. C. Neumann.

### Доказательство теоремы Коши.

При выводѣ основной теоремы теории уравнений, состоящей въ томъ, что всякое уравнение имѣетъ корень вида  $p+qi$ , доказываютъ, что наименьшая величина модуля функции  $f(p+qi)$  есть нуль.

Здѣсь предложено доказательство этой теоремы, не принимая въ соображеніе модуля. Доказательство состоитъ изъ двухъ частей:

$$f(p+qi) = P + Qi; \quad p_1 = p + h, \quad q_1 = q + k$$

$$f(p_1 + q_1 i) = P_1 + Q_1 i = f(p + q i + h + ki) = P + Qi + (h + ki) f'(p + qi) + \dots + \frac{(h + ki)^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} f^{(n)}(p + qi) + \dots$$

Положимъ для общности  $f'(p + qi) = 0, f''(p + qi) = 0, \dots, f^{(n-1)}(p + qi) = 0$ , тогда

$$f(p_1 + q_1 i) = P_1 + Q_1 i = P + Qi + \frac{(h + ki)^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} f^{(n)}(p + qi) + \dots$$

Называя  $h = r \cos \varphi, k = r \sin \varphi$ , гдѣ  $\varepsilon$  очень малая величина 1-го порядка,

$$h + ki = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \varepsilon; \quad (h + ki)^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \varepsilon^n$$

$$f(p_1 + q_1 i) = P_1 + Q_1 i = P + Qi + r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) (P^{(n)} + Q^{(n)} i) \varepsilon^n + \dots$$

$$\text{гдѣ} \quad f'(p + qi) = P' + Q' i, \quad \frac{f''(p + qi)}{1 \cdot 2} = P'' + Q'' i, \dots, \frac{f^{(n)}(p + qi)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = P^{(n)} + Q^{(n)} i$$

$$f(p_1 + q_1 i) = P_1 + Q_1 i = P + r^n (P^{(n)} \cos n\varphi - Q^{(n)} \sin n\varphi) \varepsilon^n + \{Q + r^n (P^{(n)} \sin n\varphi + Q^{(n)} \cos n\varphi) \varepsilon^n\} i + \dots$$

+ члены, содержащіе  $\varepsilon$  въ высшей степени.

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P + r^n (P^{(n)} \cos n\varphi - Q^{(n)} \sin n\varphi) \varepsilon^n \\ Q_1 &= Q + r^n (P^{(n)} \sin n\varphi + Q^{(n)} \cos n\varphi) \varepsilon^n \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Остальными членами, какъ содержащими  $\varepsilon$  въ высшей степени, мы пренебрегаемъ.

Не трудно изъ уравнений (1) видѣть, что можно выбрать такіа  $r$  и  $\varphi$ , а следовательно  $h$  и  $k$ , чтобы численные величины  $P_1$  и  $Q_1$  были меньше численныхъ величинъ  $P$  и  $Q$ ; стоитъ только положить

1. Сперва выводимъ, что для всякой функции  $f(x)$ , дающей при вставкѣ  $p+qi$  величину  $f(p+qi) = P+Qi$ , возможенъ такой выборъ величинъ  $p_1 = p+h$  и  $q_1 = q+k$ , чтобы въ  $f(p_1 + q_1 i) = P_1 + Q_1 i$  численные величины  $P_1$  и  $Q_1$  были соответственно меньше численныхъ величинъ  $P$  и  $Q$ .

$$\left. \begin{aligned} r^n (P^{(n)} \cos n\varphi - Q^{(n)} \sin n\varphi) &= \theta \\ r^n (P^{(n)} \sin n\varphi + Q^{(n)} \cos n\varphi) &= \theta_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

такими, чтобы знакъ конечныхъ количествъ  $\theta$  и  $\theta_1$  былъ противоположенъ знаку  $P$  и  $Q$ , а  $r$  и  $\varphi$ , удовлетворяющія требуемымъ условіямъ, определяются изъ уравнений (2):

$$\frac{P^{(n)} \sin n\varphi + Q^{(n)} \cos n\varphi}{P^{(n)} \cos n\varphi - Q^{(n)} \sin n\varphi} = \frac{\theta_1}{\theta} = u; \quad \operatorname{tg} n\varphi = \frac{u P^{(n)} - Q^{(n)}}{P^{(n)} + u Q^{(n)}}$$



гдѣ можно принять  $u = \pm 1$ , смотря потому одинаковы ли, или неодинаковы знаки  $P$  и  $Q$ . Зная  $\operatorname{tg} \varphi$ , найдемъ  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$  и  $r$ .

Возраженіе, что  $\varphi$  не опредѣлится, если  $P^{(*)} = 0$ , и  $Q^{(*)} = 0$ , не имѣетъ мѣста, ибо тогда бы

$$P^{(*)} + Q^{(*)}i = \frac{f^{(*)}(p+qi)}{1 \cdot 2 \dots n} = 0, \text{ чего мы не полагали.}$$

Доказавши возможность одновременнаго убавленія численныхъ величинъ, а слѣдовательно и одновре-

Сохраняя прежнее обозначеніе имѣемъ  $f(p+qi) = Qi$

$$f(p_1 + q_1 i) = Qi + r \varepsilon (\cos \varphi + i \sin \varphi) (P' + Q' i) + r^2 \varepsilon^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) (P'' + Q'' i) + \dots$$

$$f(p_1 + q_1 i) = r (P' \cos \varphi - Q' \sin \varphi) + r^2 (P'' \cos 2\varphi - Q'' \sin 2\varphi) \varepsilon^2 + \dots + \{Q + r(Q' \cos \varphi + P' \sin \varphi) \varepsilon\} i + \dots$$

Можно найти  $r$  и  $\varphi$  подъ условіемъ, чтобы

$$\left. \begin{aligned} r (P' \cos \varphi - Q' \sin \varphi) &= 0 \\ r (Q' \cos \varphi + P' \sin \varphi) &= \theta \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

гдѣ  $\theta$  конечная величина со знакомъ противоположнымъ знаку  $Q$ .

Изъ уравненій (3)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{P'}{Q'}, \quad r = \frac{\theta}{Q' \cos \varphi + P' \sin \varphi} \quad \text{и}$$

$$f(p_1 + q_1 i) = r^2 (P' \cos 2\varphi - Q' \sin 2\varphi) \varepsilon^2 + (Q + \theta \varepsilon) i + \text{члены, содержащіе } \varepsilon \text{ въ высшихъ степеняхъ.}$$

Продолжая дѣлать подобный выборъ  $p$  и  $q$ , пока  $Q$ , убавляясь постепенно, не обратится въ нуль, мы получимъ:

$$f(p_n + q_n i) = \Sigma a^2,$$

гдѣ,  $a^2$  бесконечно малая величина 2-го порядка.

$$f(p_{n+1} + q_{n+1} i) = \beta^2 + v (P \cos \varphi - Q \sin \varphi) \varepsilon^2 + r (Q \cos \varphi + P \sin \varphi) \varepsilon^2 i + \text{члены, содержащіе } \varepsilon \text{ въ высшихъ степеняхъ.}$$

Сдѣлавъ  $\left. \begin{aligned} P \cos \varphi - Q \sin \varphi &= \theta \\ Q \cos \varphi + P \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \right\}$  гдѣ знакъ  $\theta$  противоположенъ знаку  $\beta^2$ , мы постоянно убавляемъ  $\beta^2$  вещественный членъ, между тѣмъ какъ мнимый членъ будетъ величиной четвертаго порядка, такъ что послѣдовательными дѣйствіями можно дойти до величинъ  $p_\mu$  и  $q_\mu$ , при которыхъ  $f(p_\mu + q_\mu i) = \gamma^4 i$ , гдѣ  $\gamma^4$  бесконечно-малая 4-го порядка.

меннаго ихъ приближенія къ нулю, не трудно перейти къ осталъному выводу сей теоремы.

2. Положимъ, что мы нашли  $p$  и  $q$ , для которыхъ  $P$ , или  $Q$  обратилось въ нуль, такъ что  $f(p+qi) = Qi$ , тогда пользуясь вышесказаннымъ, можно подобрать такія  $p_1$  и  $q_1$ , чтобы численная величина  $Q$  убавилась, а членъ вещественный былъ очень малою величиною 2-го порядка.

Сумма бесконечно-малыхъ 2-го порядка  $\Sigma a^2$  не можетъ превосходить бесконечно-малой 1-го порядка. Однако не трудно видѣть, что можно такимъ образомъ повести дѣло, чтобы вещественный членъ  $P = \Sigma a^2$  не превосходилъ бесконечно-малой величины 2-го порядка.

Опредѣливши  $p_n$  и  $q_n$  такъ, чтобы

$$f(p_n + q_n i) = \Sigma a^2 = \beta^2$$

бесконечно-малой 2-го порядка, можно бы считать основную теорему доказанною и  $p_n + q_n i$  былъ бы искомымъ корнемъ, но для большей точности покажемъ, что отъ  $p_n$  и  $q_n$  можно перейти къ  $p_\mu$  и  $q_\mu$  такимъ, что  $f(p_\mu + q_\mu i)$  будетъ равняться бесконечно-малой вышнихъ порядковъ. Для этого положимъ

$$p_{n+1} = p_n + v \cos \varphi \varepsilon^2 \quad \text{и} \quad q_{n+1} = q_n + v \sin \varphi \varepsilon^2,$$

тогда

Ясно, что порядокъ бесконечно-малой, которой можетъ равняться  $f(p_\mu + q_\mu i)$ , можетъ быть сдѣланъ какъ угодно великъ, такъ что существованіе величинъ  $\alpha$  и  $\beta$ , при которыхъ  $f(\alpha + \beta i) = 0$ , а слѣдовательно и корни  $\alpha + \beta i$  очевидно.

Кіевъ 1861-го года.

Н. Бугаевъ.

Мал 9-го днл.

### Новое доказательство теоремы Вильсона.

Въ доказательствѣ, предлагаемомъ мною, теорема Вильсона является непосредственнымъ слѣдствіемъ теоремы Фермата и свойства первообразныхъ корней.

Если  $p$  есть простое число,  $a$  его первообразный корень, то въ рядѣ сравненій:

$$\left. \begin{aligned} a &\equiv a \pmod{p} \\ a^2 &\equiv b_2 \pmod{p} \\ a^3 &\equiv b_3 \pmod{p} \\ &\dots \dots \dots \\ a^m &\equiv b_m \pmod{p} \\ &\dots \dots \dots \\ a^{p-2} &\equiv b_{p-2} \pmod{p} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Т. I.

ни одно изъ чиселъ  $a, b_2, b_3, b_4, \dots, b_{p-2}$  не можетъ быть равно единицѣ.

Точно также между  $a, b_2, b_3, b_4, \dots, b_{p-2}$  нѣтъ чиселъ равныхъ, ибо если бы  $b_m = b_n$ , то существовало бы сравненіе  $a^m \equiv a^n \pmod{p}$ , что привелось бы къ сравненію  $a^m (a^{m-n} - 1) \equiv 0 \pmod{p}$ , или  $a^{m-n} \equiv 1 \pmod{p}$ , что противорѣчитъ свойству первообразнаго корня  $a$ .

Перемноживъ сравненія (1) получимъ:

$$a^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}} \equiv a b_2 b_3 b_4 \dots b_{p-2} \pmod{p} \quad (2)$$

Такъ какъ неравные числа  $a, b_2, b_3, \dots, b_{p-2}$ , будучи наименьшими положительными вычетами чиселъ  $a, a^2, a^3, \dots, a^{p-2}$ , менѣе  $p$ , и ни одно изъ нихъ



не равно единицы, то рядъ  $p-2$  чиселъ  $a, b_2, b_3 \dots b_{p-2}$  долженъ совершенно заключаться въ рядъ чиселъ  $2, 3, 4, 5 \dots p-2, p-1$ , такъ что

$$ab_2b_3b_4 \dots b_{p-2} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots p-2 \cdot p-1$$

и сравненіе (2) приметъ видъ:

$$a \frac{p-1}{2} \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots p-2 \cdot p-1 \pmod{p}; \quad (3)$$

откуда, принявъ  $a$  за основаніе индикаторовъ имѣемъ:

$$\text{Ind. } (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot p-2 \cdot p-1) \equiv \frac{p-1}{2} \cdot p-2 \pmod{p-1}. \quad (4)$$

Изъ сравненія (3) получаемъ:

$$a^{p-1} \cdot p-2 \equiv (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots p-2 \cdot p-1)^2 \pmod{p}. \quad (5)$$

По теоремѣ Фермата

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \quad a^{p-1} \cdot p-2 \equiv 1 \pmod{p}, \dots \quad (6)$$

слѣдовательно изъ сравненій (5) и (6) выходитъ:

$$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots p-2 \cdot p-1)^2 \equiv 1 \pmod{p} \text{ или } (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p-2 \cdot p-1 - 1)(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p-2 \cdot p-1 + 1) \equiv 0 \pmod{p}. \quad (7)$$

Но число  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p-2 \cdot p-1 - 1$  не дѣлится на  $p$ , ибо въ противномъ случаѣ существовали бы сравненія:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p-2 \cdot p-1 \equiv 1 \pmod{p}$$

$$\text{Ind. } (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p-2 \cdot p-1) \equiv 0 \pmod{p-1}. \quad (8)$$

Послѣднее, вмѣстѣ съ (4), дало бы мѣсто равенію:

$$\frac{(p-1)(p-2)}{2} \equiv 0 \pmod{p-1}, \text{ очевидная нелѣпость; ибо}$$

$$\frac{p-1}{2} \cdot p-2 = p-1 \cdot \frac{p-3}{2} + \frac{p-1}{2} \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p-1},$$

слѣдовательно если по (7) не имѣть мѣста сравненіе  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p-2 \cdot p-1 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ , то должно существовать сравненіе

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p-2 \cdot p-1 + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

или теорема Вильсона.

Кіевъ

Н. Бугаевъ.

20-го Мая 1861.

## II.

### Библиографическій указатель.

23. *Handbuch der Kugelfunctionen.* Von Dr. E. Heine Berlin, 1861.

Изданная нынѣ книга предназначается служить въ нѣкоторой степени введеніемъ къ систематическому изложенію теоріи особаго рода функций, вообще называемыхъ Лапласовыми функциями и часто встрѣчающихся въ изслѣдованіяхъ о притяженіи сфероидовъ, о фигурѣ земли и въ нѣкоторыхъ другихъ частяхъ математической физики. Авторъ пользовался сочиненіями Лапласа, Лежандра, Гауса, Дирикле, Якоби, Грина (Green), Ламе и другихъ. Сочиненіе Г-на Гейне составляетъ весьма замѣчательную монографію объ одномъ изъ любопытныхъ предметовъ математическаго анализа. Последняя часть книги содержитъ приложенія къ теоріи механическихъ квадратуръ, по руководству Гаусса, и сверхъ того приложенія къ теоріи притяженій и теоріи теплоты.

24. *The Mathematical Works of Isaac Barrow.* Edited for Trinity College by W. Whewell, Cambridge. 1860.

Здѣсь заключаются лекціи, которыя читалъ Барровъ въ 1664—1670 въ Кембриджѣ, въ качествѣ Lucasian Professor of Mathematics. Авторъ принадлежитъ къ числу знаменитѣйшихъ ученыхъ XVII-го вѣка, и для занимающихся исторіею физико-математическихъ наукъ, очень занимательны будутъ его *Lectiones Mathematicae*, *Lectiones Opticae* и *Lectiones Geometricae*. Первыя изъ нихъ содержатъ общія начала математики, вторыя геометрическія доказательства разныхъ оптическихъ предложеній, а въ третьихъ разсматриваются свойства кривыхъ линій. Въ этомъ же томѣ помѣщены предисловіе и посвященіе къ Баррову изданію Евклида.

довыхъ началъ, также его предисловіе къ изданію твореній Архимеда, Аполлонія и Θεодосія.

25. *Report of the Superintendent of the coast Survey, showing the progress of the Survey during the Year 1857.*

Начальникъ этой съемки, Профессоръ A. D. Bache принадлежитъ къ числу отличнѣйшихъ американскихъ ученыхъ; между его сотрудниками находились также лица, которые своими трудами приобрѣли почетную извѣстность. Обширность работъ, богатые средства, назначенныя для ихъ исполненія и многія ученые изслѣдованія дѣлаютъ эту съемку въ высшей степени достойною вниманія. — Признательности и даже удивленія заслуживаетъ щедрость, съ которою изданъ этотъ отчетъ Правительствомъ Соединенныхъ Штатовъ въ числѣ 6200 экземпляровъ, изъ коихъ большая часть вмѣстѣ съ дорогими картами разосланы въ даръ нѣскольку публичнымъ библиотекамъ, Академіямъ и Обсерваторіямъ, но также значительному числу частныхъ лицъ.

Начиная съ сѣверо-восточной оконечности Соединенныхъ Штатовъ, съемка простирается къ югу и западу, около береговъ атлантическаго океана и мексиканскаго залива; потомъ идетъ въ южной ея части по берегамъ тихаго океана, и направляется оттуда къ сѣверу и западу. Съ географическою съемкою соединены морскіе промѣры и разныя гидрографическія работы, каковы изслѣдованія Гольфъ-стрема, морскихъ приливовъ и т. п.; разсмотрѣны также вѣтры, морскія теченія и явленія земнаго магнетизма.

Приложенныя таблицы и карты весьма важны для мореходцевъ, показывая имъ всё, что можетъ служить къ удобству и безопасности плаванія вдоль береговъ



соединенныхъ Штатовъ, также въ мексиканскомъ заливѣ и около нѣкоторыхъ острововъ.

Въ томъ же отчетѣ находится нѣсколько любопытныхъ статей; онѣ содержатъ отдѣльныя ученія изысканія и мы вкратцѣ приведемъ ихъ содержаніе.

Одинъ изъ искуснѣйшихъ американскихъ астрономовъ, Г-нъ Гульдъ (В. Gould) довольно подробно разсматривалъ способъ опредѣлять разности географ. долготъ помощью гальваническихъ телеграфовъ. Въ Америкѣ употреблялся этотъ способъ болѣе, чѣмъ въ другихъ странахъ и потому не удивительно, что тамъ собрано много объ этомъ свѣдѣній. Для достиженія желаемой точности потребны разныя предосторожности. Нетолько нужно производить многія опредѣленія въ одну и въ обратную сторону, но слѣдуетъ еще по возможности исключать промежуточные сигналы и пользоваться хорошими регистрируемыми аппаратами (recording apparatus). Безъ этихъ пособій выводы могутъ быть сомнительны; — Г. Гульдъ полагаетъ, что въ изслѣдованіяхъ, произведенныхъ въ Европѣ, встрѣчаются недостатки, и опредѣленія разностей долготъ помощью гальваническихъ телеграфовъ отдано въ нѣкоторыхъ случаяхъ предпочтеніе предъ всеми другими способами безъ достаточной критики.

Знаменитый американскій Геометръ Г. Пирсъ (В. Peirce) предложилъ нѣсколько очень занимательныхъ указаній о степени точности разныхъ астрономическихъ средствъ для изысканія геогр. долготъ. Въ благопріятныхъ случаяхъ наблюденія большихъ солнечныхъ затмѣній, особенно полныхъ и кольцеобразныхъ, могутъ служить къ опредѣленію долготъ съ точностію до  $\frac{1}{2}$  или даже до  $\frac{1}{3}$  секунды времени. Въ отношеніи къ покрытіямъ звѣздъ луною, Г. Пирсъ полагаетъ, что едва ли даже нынѣ, пользуясь отличными лунными таблицами Г. Гаусена, можно скоро достигнуть благонадежнаго результата помощью наблюденія отдѣльныхъ покрытій. Независимо отъ малыхъ погрѣшностей таблицъ, неправильности очертаній краевъ луны оказываютъ вліяніе, которое уменьшаетъ ту степень точности, какой безъ того можно было бы достигнуть. Гораздо выгоднѣе наблюденія покрытій луною звѣздъ въ Плеядахъ, какъ это уже замѣтилъ Бессель. Въ этомъ случаѣ наблюдаются въ теченіи короткаго времени покрытія многихъ звѣздъ на разныхъ точкахъ луннаго диска, и потому можно ожидать, что въ среднихъ выводахъ значительно ослабится вліяніе неровностей краевъ луны. На этотъ родъ наблюденій обращено особенное вниманіе въ Америкѣ; тамъ же тщательно занимаются обработкою прежнихъ наблюденій надъ покрытіями Плеядъ. Что касается до лунныхъ кульминацій, то по мнѣнію Г-на Пирса этимъ способомъ трудно опредѣлять разности

долготъ точнѣе чѣмъ до одной секунды времени. Съ этими заключеніями вѣроятно будутъ согласны всѣ астрономы.

Въ американской съемкѣ за основаніе принята долгота обсерваторіи въ американскомъ городѣ Кембриджѣ (Cambridge U. S. Massachuset). Различныя способы, по которымъ изслѣдована эта долгота, къ западу отъ Гринича, даютъ слѣдующія числа:

По многочисленнымъ луннымъ кульминаціямъ эта долгота . . . . . =  $4^h 44^m 28^s, 4$

По затмѣніямъ солнца и покрытіямъ звѣздъ луною . . . . . =  $4 44 29, 6$

По хронометрическимъ опредѣленіямъ, выведеннымъ помощью многихъ перевозокъ хронометровъ изъ Ливерпуля въ Америку и обратно, въ 1849, 1851 и 1855 годахъ . . . . . =  $4 44 30, 8$

Вѣроятная долгота предполагается . . . . . =  $4^h 44^m 29^s, 5$ .

Г-нъ Ваще предложилъ формулы для вычисленія хронометрическихъ опредѣленій долготъ по теоріи вѣроятностей, принимая во вниманіе вліяніе перемѣнъ температуры на ходъ хронометровъ и на разность ходовъ въ путешествіяхъ и въ покоѣ.

Приливы и отливы на обширныхъ берегахъ Соединенныхъ Штатовъ представляютъ многія разнообразныя явленія, и потому ихъ раздѣлили на три отдѣльные класса явленій. Приливы водъ атлантическаго океана суть самые правильные; каждыя сутки приливъ и отливъ повторяются два раза и возвышенія слѣдующихъ одинъ за другими высокихъ водъ, мало между собою различаются. Приливы и отливы на берегахъ тихаго океана повторяются тоже дважды въ сутки, но утренніе и вечерніе приливы значительно отличаются между собою по высотѣ; такъ что случается видѣть низкія скалы на три фута поверхъ отливной воды, между тѣмъ какъ въ слѣдующій за тѣмъ отливъ эти скалы остаются совершенно покрытыми водою. Также промежутки между послѣдовательными высокими и низкими водами выходятъ весьма неравными. Въ портахъ Мексиканскаго залива, къ западу отъ мыса Св. Георгія, приливъ и отливъ совершаются болѣею частию по разу въ сутки, и только въ нѣкоторые дни мѣсяца повторяются дважды въ 24 часа. Измѣненіе уровня водъ въ этихъ портахъ довольно мало; оно становится гораздо значительнѣе къ востоку отъ мыса св. Георгія. Мы съ любопытствомъ узнали, изъ донесенія Г-на Коля (F. G. Kohl), что онъ занимается составленіемъ подробной исторіи морскихъ открытій и разнообразныхъ изслѣдованій, совершенныхъ вдоль западныхъ береговъ Соединенныхъ Штатовъ.

А. С.

### III.

#### Извѣстіе о новой кометѣ.

— Новая комета, неожиданно и одновременно усмотрѣнная во многихъ мѣстахъ Европы а именно  $\frac{30}{18}$  Юня, въ настоящее время быстро удаляется отъ насъ, такъ что въ послѣдній день нашего Юня свѣтъ ея долженъ составлять едва  $\frac{1}{40}$  того блеска въ какомъ она явилась 18 Юня. Приблизительные элементы, вычисленные Г. Паше на основаніи первыхъ наблюденій, пред-

ставляютъ въ наклоненіи къ эклиптикѣ и въ отстояніи перигелія столь значительное сходство съ элементами кометы 1748 года (видѣнной равнымъ образомъ простыми глазами и которой путь опредѣленъ Лемонье), что можно было бы принять ихъ тождественными; но направленіе движенія новой кометы есть прямое, тогда какъ кометы 1748 обратное.

Ред.



# Извлеченія изъ периодическихъ изданій.

1. Новый выводъ формулъ для сферическаго эксцесса, Др. О Вернера.

(Mélanges mathématiques et astronomiques T. II. и Zeitschrift für Mathematik und Physik 1861. Heft 2).

Пусть стороны сферическаго треугольника,  $a, b, c$  не превосходящія  $180^\circ$ , находятся въ слѣдующей за-

висимости отъ сторонъ  $p, q, r$  плоскаго треугольника:

$$p = \cos \frac{1}{2} a \cdot \cos \frac{1}{2} b, q = \sin \frac{1}{2} a \cdot \sin \frac{1}{2} b \text{ и } r = \cos \frac{1}{2} c;$$

то, называя соответственно углы сферич. т-ка  $A, B, C$  и плоскаго  $P, Q, R$ , мы имѣемъ:

$$r^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cdot \cos R$$

$$\text{или } \cos^2 \frac{1}{2} c = \cos^2 \frac{1}{2} a \cdot \cos^2 \frac{1}{2} b + \sin^2 \frac{1}{2} a + \sin^2 \frac{1}{2} b - 2 \cos \frac{1}{2} a \cdot \cos \frac{1}{2} b \cdot \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cdot \cos R.$$

Пользуясь известными тригонометрическими отношеніями:

$$\sin^2 \frac{1}{2} x = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{1}{2} x = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{1}{2} x \cdot \cos \frac{1}{2} x,$$

предыдущая формула, по приведеніи, обращается въ

$$\cos c = \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos R;$$

а такъ какъ кромѣ того въ сферическомъ треугольникѣ:

$$\cos c = \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos C,$$

слѣдовательно

$$\cos R = -\cos C, \text{ или } R = 180^\circ - C.$$

Далѣе, пользуясь известною формулою плоской тригонометріи и вышевыведенными отношеніями, мы получимъ:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (P - R) = \frac{p - q}{p + q} \cotg \frac{1}{2} R = \frac{\cos \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} (a - b)} \operatorname{tang} \frac{1}{2} C,$$

а такъ какъ по Неперовымъ аналогіямъ

$$\cotg \frac{1}{2} (A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} (a - b)} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} C;$$

то слѣдуетъ что

$$\frac{1}{2} (P - Q) = 90^\circ - \frac{1}{2} (A + B).$$

$$\text{Сверхъ того мы имѣемъ: } P + Q = 180 - R = C,$$

$$\text{откуда выводимъ: } P = 90^\circ - \frac{A + B - C}{2} = C - \frac{1}{2} E \text{ и } Q = \frac{A + B + C}{2} - 90^\circ = \frac{1}{2} E,$$

гдѣ  $E$  обозначаетъ сферическій эксцессъ.

Возьмемъ теперь слѣдующія извѣстныя формулы плоской тригонометріи.

$$\sin P = \frac{1}{2qr} \sqrt{(p+q+r)(q+r-p)(p+r-q)(p+q-r)},$$

$$\sin Q = \frac{1}{2pr} \sqrt{(p+q+r)(q+r-p)(p+r-q)(p+q-r)},$$

$$\cos P = \frac{q^2 + r^2 - p^2}{2qr}, \quad \cos Q = \frac{p^2 + r^2 - q^2}{2pr},$$

$$\sin \frac{1}{2} P = \sqrt{\frac{(p+r-q)(p+q-r)}{4qr}}, \quad \sin \frac{1}{2} Q = \sqrt{\frac{(q+r-p)(p+q-r)}{4pr}},$$

$$\cos \frac{1}{2} P = \sqrt{\frac{(p+q+r)(p+q-r)}{4qr}}, \quad \cos \frac{1}{2} Q = \sqrt{\frac{(p+q+r)(p+r-q)}{4pr}},$$

и замѣчая, что въ нихъ, на основаніи выше-выведенныхъ условій:

$$p + q + r = \cos \frac{1}{2} (a - b) + \cos \frac{1}{2} c = 2 \cos \frac{1}{4} (a + c - b) \cos \frac{1}{4} (b + c - a)$$

$$q + r - p = \cos \frac{1}{2} c - \cos \frac{1}{2} (a + b) = 2 \sin \frac{1}{4} (a + b + c) \sin \frac{1}{4} (a + b - c)$$



$$p + r - q = \cos \frac{1}{2} c + \cos \frac{1}{2} (a + b) = 2 \cos \frac{1}{4} (a + b + c) \cos \frac{1}{4} (a + b - c)$$

$$p + q - r = \cos \frac{1}{2} (a - b) - \cos \frac{1}{2} c = 2 \sin \frac{1}{4} (a + c - b) \sin \frac{1}{4} (b + c - a)$$

и

$$q^2 + r^2 - p^2 = \cos^2 \frac{1}{2} c - (\cos^2 \frac{1}{2} a \cos^2 \frac{1}{2} b - \sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b) = \cos^2 \frac{1}{2} c - \cos^2 \frac{1}{2} a + \sin^2 \frac{1}{2} b = \frac{1 + \cos c - \cos a - \cos b}{2}$$

$$p^2 + r^2 - q^2 = \cos^2 \frac{1}{2} c + \cos^2 \frac{1}{2} a = \sin^2 \frac{1}{2} b = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{2}$$

получается следующая система формул:

$$1, \left\{ \begin{aligned} \sin \left( C - \frac{1}{2} E \right) &= \frac{\sqrt{\sin \frac{1}{2} (a + b + c) \sin \frac{1}{2} (b + c - a) \sin \frac{1}{2} (a + c - b) \sin \frac{1}{2} (a + b - c)}}{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \\ \sin \frac{1}{2} E &= \frac{\sqrt{\sin \frac{1}{2} (a + b + c) \sin \frac{1}{2} (b + c - a) \sin \frac{1}{2} (a + c - b) \sin \frac{1}{2} (a + b - c)}}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \end{aligned} \right.$$

$$2, \left\{ \begin{aligned} \cos \left( C - \frac{1}{2} E \right) &= \frac{1 + \cos c - \cos a - \cos b}{4 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}, \quad \cos \frac{1}{2} E = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \end{aligned} \right.$$

$$3, \left\{ \begin{aligned} \sin \left( \frac{1}{2} C - \frac{1}{4} E \right) &= \frac{\sqrt{\cos \frac{1}{4} (a + b + c) \sin \frac{1}{4} (b + c - a) \sin \frac{1}{4} (a + c - b) \cos \frac{1}{4} (a + b - c)}}{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \\ \sin \frac{1}{4} E &= \frac{\sqrt{\sin \frac{1}{4} (a + b + c) \sin \frac{1}{4} (b + c - a) \sin \frac{1}{4} (a + c - b) \sin \frac{1}{4} (a + b - c)}}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \end{aligned} \right.$$

$$4, \left\{ \begin{aligned} \cos \left( \frac{1}{2} C - \frac{1}{4} E \right) &= \frac{\sqrt{\sin \frac{1}{4} (a + b + c) \cos \frac{1}{4} (b + c - a) \cos \frac{1}{4} (a + c - b) \sin \frac{1}{4} (a + b - c)}}{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \\ \cos \frac{1}{4} E &= \frac{\sqrt{\cos \frac{1}{4} (a + b + c) \cos \frac{1}{4} (b + c - a) \cos \frac{1}{4} (a + c - b) \cos \frac{1}{4} (a + b - c)}}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \end{aligned} \right.$$

Откуда по раздѣленію 3 на 4 получаются наконецъ слѣдующія весьма простыя выраженія.

$$5, \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} C - \frac{1}{4} E \right) &= \frac{\sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{4} (b + c - a) \operatorname{tg} \frac{1}{4} (a + c - b)}}{\operatorname{tg} \frac{1}{4} (a + b + c) \operatorname{tg} \frac{1}{4} (a + b - c)} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{4} E &= \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{4} (a + b + c) \operatorname{tg} \frac{1}{4} (b + c - a) \operatorname{tg} \frac{1}{4} (a + c - b) \operatorname{tg} \frac{1}{4} (a + b - c)}. \end{aligned} \right.$$

Примѣчаніе. Здѣсь представляется способъ опредѣленія угловъ сферич. треугольника по сторонамъ, вычисливъ сначала  $E$  по послѣдней формулѣ и затѣмъ  $C$  изъ

$$\operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} C - \frac{1}{4} E \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{4} (b + c - a) \operatorname{tg} \frac{1}{4} (a + c - b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{4} E};$$

$A$  и  $B$  опредѣляются подобными же формулами.

М. Г.



2. Одновременно встрѣчаются два изслѣдованія относительно теплопроводимости газовъ: Магнуса, (въ Poggendorf's Ann. B. CXII s. 497), и Тиндалла (въ Comptes rendus 25 Fevrier 1861). Первый изъ упомянутыхъ физиковъ занимался собственно теплопроводимостью газовъ, для чего употреблялъ стеклянный сосудъ съ тонкими стѣнками, въ который былъ вставленъ термометръ; этотъ сосудъ нагревался сверху кипящею водою, и былъ защищенъ отъ вѣшняго вліянія еще двумя сосунами. Въ другомъ опытѣ Магнусъ употреблялъ вмѣсто термометра термоэлектрической столбъ, причемъ и устройство опыта было отчасти измѣнено. Результаты изслѣдованій Магнуса заключаются въ слѣдующемъ: 1) Температура, показываемая термометромъ, помѣщеннымъ въ газовой средѣ, нагрѣтой сверху, бываетъ различна, смотря по роду газа; въ водородѣ эта температура выше нежели въ другихъ испытанныхъ имъ газахъ, а именно атмосферномъ воздухѣ, кислородѣ, водородѣ, углекислотѣ, окиси углерода, закиси азота, болотистаго газа, маслороднаго газа, амміака, ціанна, и сѣрнистой кислоты.

2) Температура, показываемая термометромъ въ водородѣ, выше, нежели въ пустомъ пространствѣ, и чѣмъ газъ сгущеннѣе, тѣмъ она выше; между тѣмъ какъ въ другихъ газахъ температура ниже, нежели въ пустомъ пространствѣ, и тѣмъ ниже чѣмъ газъ сгущеннѣе. Отсюда слѣдуетъ, что водородъ проводитъ теплоту подобно металламъ. Это замѣчательное свойство водорода выказывается не только тогда, когда онъ свободенъ, но и въ томъ случаѣ если его движеніе удерживается лебяжьемъ пухомъ или другимъ подобнымъ веществомъ.

3) Все газы представляютъ значительное сопротивленіе прохожденію теплотворныхъ лучей и это сопротивленіе тѣмъ значительнѣе, чѣмъ сгущеннѣе газъ; изъ всѣхъ газовъ атмосферный воздухъ и его составныя части проводятъ наиболѣе теплоты.

4) Прохожденіе теплоты измѣняется съ неточникомъ, но лучи, выходящіе изъ кипящей воды, представляютъ наиболѣе разнообразія при прохожденіи чрезъ различные газы. Между безцвѣтными газами амміакъ имѣетъ самую дурную проводимость, а послѣ него маслородный газъ.

Тиндаллъ занимался поглощательною и лученепускательною способностью газовъ и паровъ: онъ изслѣдовалъ свойства 8 газовъ и 13 паровъ. Приборъ, употребленный упомянутымъ физикомъ состоялъ изъ мѣд-

наго куба, покрытаго съ одной стороны копотью, и содержащаго въ себѣ кипящую воду; изъ трубки, изъ которой былъ вытянутъ воздухъ, закрытой съ обѣихъ концовъ пластинками изъ каменной соли. Изъ другой трубки, приставленной къ первой, которая при посредствѣ воздушнаго насоса, могла быть наполнена различными газами, въ различной степени сгущенія; изъ термомультипликатора, который показывалъ степень теплоты, прошедшей чрезъ различные испытываемы газы. Опыты показали, что самое большое поглощеніе теплоты происходитъ въ амміакѣ и маслородномъ газѣ (81%), а самое меньшее въ атмосферномъ воздухѣ (0,3%); между ними можно помѣстить все остальные испытанные газы; окись углерода, углекислоту и др. Результаты эти сходны съ результатами, полученными Магнусомъ; ибо тѣмъ меньше теплоты доходитъ до термометра, чѣмъ значительнѣе поглощеніе оной.

Тиндаллъ нашелъ, что ниже извѣстной степени сгущенія газа, поглощеніе теплоты пропорціонально сгущенію; далѣе пропорціональности нѣтъ — поглощеніе замедляется.

Пары поглощаютъ значительную часть теплоты; между ними однакожъ самую большую поглощательную способность имѣютъ пары сѣрнаго эфира, а самую меньшую сѣроуглерода ( $CS_2$ ). Пары эфира поглощаютъ въ 10 разъ болѣе нежели маслородный газъ, и въ 100 разъ болѣе нежели воздухъ.

Водяные пары, находящіеся въ атмосферѣ, по наблюденіямъ въ хорошее ноябрское время, оказали въ 15 разъ большую поглощательную способность противъ чистаго воздуха. Отсюда слѣдуетъ, что количество паровъ, постоянно содержащихся въ воздухѣ, должно имѣть вліяніе на климатъ. Замѣчательно еще, что озонированный кислородъ поглощаетъ въ 4 раза болѣе теплоты, нежели кислородъ обыкновенный.

Лученепускательная способность газовъ и паровъ соотвѣстственна ихъ поглощательной способности: гдѣ болѣе поглощенія, тамъ болѣе и лученепусканія.

Наконецъ замѣчательно и то, что все простыя газы имѣютъ меньшую поглощательную способность, нежели сложныя. При этомъ надобно различать механическую смѣсь и химическую: первая мало отличается въ своемъ теплотворномъ свойствѣ отъ ее составныхъ частей; вторая же производитъ огромное поглощеніе, сравнительно съ составляющими ее газами.

К. Ч.

### Доякое рѣшеніе задачи № 3, предложенной Г-мъ Износковымъ.

(См. № 8 Вѣст. Мат. Наукъ).

Положивъ для краткости, 
$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{c^2}{4x^2}} \cos bx^2 dx = u \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} e^{-\frac{c^2}{4x^2}} \sin bx^2 dx = v,$$

и дифференцируя каждый изъ сихъ интеграловъ по  $c$ , получимъ въпервыхъ

$$\frac{du}{dc} = -\frac{c}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{c^2}{4x^2}} \cos bx^2 \frac{dx}{x^2} \quad \text{и} \quad \frac{dv}{dc} = -\frac{c}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{c^2}{4x^2}} \sin bx^2 \frac{dx}{x^2},$$

и потомъ, дифференцируя еще разъ,



$$\frac{d^2u}{dc^2} = \frac{1}{c} \cdot \frac{du}{dc} + \frac{c^2}{4} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4x^2}} \cos bx^2 \frac{dx}{x^2} \quad \frac{d^2v}{dc^2} = \frac{1}{c} \cdot \frac{dv}{dc} + \frac{c^2}{4} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4x^2}} \sin bx^2 \frac{dx}{x^2}$$

по интегрированию по частямъ даетъ

$$\int_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4x^2}} \cos bx^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{c^2} \int_0^\infty \frac{1}{x} \cos bx^2 d e^{-\frac{c^2}{4x^2}} = \frac{4b}{c^2} \int_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4x^2}} \sin bx^2 dx + \frac{2}{c^2} \int_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4x^2}} \cos bx^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{4b}{c^2} v - \frac{4}{c^2} \cdot \frac{du}{dc}$$

такъ что, по подстановкѣ, получимъ

$$\frac{d^2u}{dc^2} = b v$$

Точно также найдемъ:

$$\frac{d^2v}{dc^2} = -b u$$

Изъ двухъ послѣднихъ уравненій выводимъ слѣдующія дифференціальныя уравненія:

$$\frac{d^4u}{dc^4} + b^2u = 0, \quad \frac{d^4v}{dc^4} + b^2v = 0,$$

интегрированіе которыхъ доставитъ намъ выраженія для искоемыхъ функций  $u$  и  $v$ . Притомъ, такъ какъ  $\sin$

$$u = \left( A \cos c \sqrt{\frac{b}{2}} + B \sin c \sqrt{\frac{b}{2}} \right) e^{-c \sqrt{\frac{b}{2}}} + \left( C \cos c \sqrt{\frac{b}{2}} + D \sin c \sqrt{\frac{b}{2}} \right) e^{c \sqrt{\frac{b}{2}}}$$

$$v = \left( A' \cos c \sqrt{\frac{b}{2}} + B' \sin c \sqrt{\frac{b}{2}} \right) e^{-c \sqrt{\frac{b}{2}}} + \left( C' \cos c \sqrt{\frac{b}{2}} + D' \sin c \sqrt{\frac{b}{2}} \right) e^{c \sqrt{\frac{b}{2}}}$$

Для опредѣленія величинъ постоянныхъ  $A, B, C$  и  $D$ , соответствующихъ искомому нами частному интегралу, одифференцируемъ общее выраженіе  $u$  три раза по  $c$  и въ полученныхъ выраженіяхъ для  $\frac{du}{dc}, \frac{d^2u}{dc^2}, \frac{d^3u}{dc^3}$ , такъ же какъ и въ первоначальномъ для  $u$ , положимъ  $c=0$ , что дастъ намъ слѣдующія уравненія:

$$A + C = u_0$$

$$\sqrt{\frac{b}{2}} (B - A + C + D) = \left( \frac{du}{dc} \right)_0$$

$$-b (B - D) = \left( \frac{d^2u}{dc^2} \right)_0$$

$$b \sqrt{\frac{b}{2}} (A + B + D + C) = \left( \frac{d^3u}{dc^3} \right)_0$$

гдѣ  $u_0, \left( \frac{du}{dc} \right)_0, \left( \frac{d^2u}{dc^2} \right)_0$  и  $\left( \frac{d^3u}{dc^3} \right)_0$  означаютъ величины интеграла  $u$  и его первыхъ трехъ производныхъ по  $c$ , получаемыя при положеніи въ нихъ  $c=0$ . Величины  $\sin$  найдутся, припомнимъ слѣдующія двѣ весьма извѣстныя формулы, найденныя въ первый разъ, какъ мнѣ кажется, Эйлеромъ:

$$\int_0^\infty \sin bx^2 dx = \int_0^\infty \cos bx^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2b}}$$

Такимъ образомъ мы будемъ имѣть  $u_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2b}}$

уравненія тождественны, то ихъ интегралы, будучи одного и того же вида, могутъ отличаться только постоянными количествами въ нихъ входящими. По общему правилу интегрированія линейныхъ уравненій съ постоянными коэффициентами составляемъ вспомогательное уравненіе четвертой степени.

$$r^4 + b^2 = 0,$$

которое, какъ извѣстно будетъ имѣть корнями слѣдующія двѣ пары мнимыхъ сопряженныхъ выраженій

$$+ \sqrt{\frac{b}{2}} \pm \sqrt{\frac{b}{2}} \cdot \sqrt{-1} \quad \text{и} \quad - \sqrt{\frac{b}{2}} \pm \sqrt{\frac{b}{2}} \cdot \sqrt{-1},$$

и слѣдовательно, искомыя общіе интегралы, заключающіе по четыре произвольныхъ постоянныхъ, будутъ:

Для полученія величины производной  $\left( \frac{du}{dc} \right)_0$ , которая, отъ прямого положенія  $c=0$  въ вышенайденномъ выраженіи для  $\frac{du}{dc}$ , представляется въ видѣ неопредѣленномъ  $0 \cdot \infty$ , мы положимъ предварительно  $\frac{x}{c} = z$ , тогда найдемъ

$$\frac{du}{dc} = -\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{4z^2}} \cos bz^2 \frac{dz}{z^2}$$

и потомъ

$$\left( \frac{du}{dc} \right)_0 = -\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{4z^2}} \frac{dz}{z^2} = -\int_0^\infty e^{-t^2} dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Величина  $\left( \frac{d^2u}{dc^2} \right)_0$  получается непосредственно, ибо мы имѣемъ по предыдущему

$$\left( \frac{d^2u}{dc^2} \right)_0 = b v_0 = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2b}}$$

Наконецъ  $\left( \frac{d^3u}{dc^3} \right)_0 = b \left( \frac{dv}{dc} \right)_0$ , но  $\left( \frac{dv}{dc} \right)_0 = 0$ , ибо интегралъ

$$\int_0^\infty \sin bx^2 \frac{dx}{x^2}$$

имѣетъ величину конечную; въ самомъ дѣлѣ, интегрируя по частямъ, находимъ:



$$\int_0^{\infty} \sin bx^2 \frac{dx}{x} = - \int_0^{\infty} \sin bx^2 d \frac{1}{x} = \left[ \frac{\sin bx^2}{x} \right]_0^{\infty} + 2b \int_0^{\infty} \cos bx^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b}$$

и следовательно,

$$\left( \frac{d'u}{dc^3} \right)_0 = 0.$$

Имѣя все эти величины и вставляя ихъ въ предъидущія уравненія, получимъ окончательныя уравненія для опредѣленія постоянныхъ  $A, B, C$  и  $D$ ,

$$A + C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2b}}$$

$$B - A + C + D = - \sqrt{\frac{\pi}{2b}}$$

$$-B + D = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2b}}$$

$$A + B + D - C = 0;$$

откуда выводимъ

Значенія опредѣленныхъ интеграловъ:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{c^2}{4y^2}} \cos by^2 dy, \quad \int_0^{\infty} e^{-\frac{c^2}{4y^2}} \sin by^2 dy$$

можно получить такимъ образомъ.

Беремъ интегралъ:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x} \cos bx dx = \frac{a^2}{a^4 + b^2},$$

умножаемъ его на  $\cos (ca) da$  и интегрируемъ въ отношеніи къ  $a$  въ границахъ: 0 и  $\infty$   
Тогда съ помощію формулы:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x} \cos ca da = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} e^{-\frac{c^2}{4x}}$$

получимъ:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{c^2}{4x}} \cos bx \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{a^2 \cos ca da}{b^2 + a^4},$$

(\*) Пуассонъ даетъ общую формулу: (Journal de l'Ecole Polytechnique Cah. XVI, p. 231.)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2n} - a \sin \frac{\pi}{2n}\right) e^{-a \cos \frac{\pi}{2n}} + \cos\left(\frac{2\pi}{2n} - a \sin \frac{2\pi}{2n}\right) e^{-a \cos \frac{2\pi}{2n}} + \dots \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n} - a \sin \frac{(n-1)\pi}{2n}\right) e^{-a \cos \frac{(n-1)\pi}{2n}} \right]$$

$$A = -B = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2b}}, \quad C = 0, \quad D = 0,$$

и следовательно, искомое выраженіе для  $u$  будетъ

$$u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \left\{ \cos c \sqrt{\frac{b}{2}} - \sin c \sqrt{\frac{b}{2}} \right\} \cdot e^{-c \sqrt{\frac{b}{2}}}$$

Постоянныя  $A, B, C$  и  $D$  опредѣлятся совершенно подобнымъ же образомъ, и найдемъ что

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \left\{ \cos c \sqrt{\frac{b}{2}} + \sin c \sqrt{\frac{b}{2}} \right\} \cdot e^{-c \sqrt{\frac{b}{2}}}$$

Зная  $u$ , можно также получить  $v$  чрезъ простое дифференцированіе по уравненію

$$v = \frac{1}{b} \cdot \frac{d'u}{dc^3}.$$

Межевой Инженеръ-Поручикъ *Льтниковъ*.

но:

$$\int_0^{\infty} \frac{a^2 \cos ca da}{b^2 + a^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2b}} \left[ \cos c \sqrt{\frac{b}{2}} - \sin c \sqrt{\frac{b}{2}} \right] e^{-c \sqrt{\frac{b}{2}}} (*)$$

следовательно:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{c^2}{4x}} \cos bx \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \left[ \cos c \sqrt{\frac{b}{2}} - \sin c \sqrt{\frac{b}{2}} \right] e^{-c \sqrt{\frac{b}{2}}}$$

Или: (полагая:  $x = y^2$ )

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{c^2}{4y^2}} \cos by^2 dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \left[ \cos c \sqrt{\frac{b}{2}} - \sin c \sqrt{\frac{b}{2}} \right] e^{-c \sqrt{\frac{b}{2}}}.$$

Подобнымъ же способомъ получимъ:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{c^2}{4y^2}} \sin by^2 dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{4b}} \left[ \cos c \sqrt{\frac{b}{2}} + \sin c \sqrt{\frac{b}{2}} \right] e^{-c \sqrt{\frac{b}{2}}}.$$

*Л. Износковъ.*

Печатать позволяется, Вильно 3 Іюля 1861 года. Цензоръ Статскій Советникъ и Кавалеръ *А. Мухинъ*.

ВИЛЬНО Типографія *А. Марциновскаго*.

Редакторъ-Издатель *М. Гусевъ*.